**3. HIMPUNAN DAN FUNGSI**

**3.1. Aljabar Himpunan**

Konsep tentang himpunan merupakan dasar penting dalam matematika. Himpunan berperan dalam matematika dan bermanfaat dalam bentuk pemodelan dan penyelidikan masalah-masalah dalam ilmu komputer. Himpunan pertama kali dikenalkan oleh G. Cantor.

Himpunan merupakan pengertian pangkal, sehingga tidak dapat didefinisikan. Himpunan dilambangkan dengan huruf capital, misal A, B, C, … . Himpunan merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinsikan secara jelas. Objek-objek dalam himpunan disebut elemen atau anggota. Terdapat *dua cara penulisan* suatu himpunan, yaitu

1. Metode Roster (tabelaris) dengan menyebut/mendaftar nama semua anggota.

Contoh : S = {Senin, Selasa, Sabtu}

W= {hijau, kuning, merah}

I = {Surabaya, Yogyakarta, Semarang, Jakarta, Bandung}

1. Metode Rule (notasi pembentuk himpunan) dengan menyebut syarat keanggotaannya.

Contoh : S = {Senin, Selasa, Sabtu} dalam metode Rule ditulis

S = { x ⎪ x nama hari dalam satu minggu yang diawali dengan S}

W = {hijau, kuning, merah} dalam metode Rule ditulis

W = { r ⎪ r warna lampu pada rambu lalulintas}

I = {Surabaya, Yogyakarta, Semarang, Jakarta, Bandung} dalam

metode Rule ditulis

I = {i ⎪ i ibukota propinsi atau daerah istimewa di Pulau Jawa}

**Relasi Himpunan dan elemen**

Jika A dinyatakan sebagai suatu himpunan dan jika x dinyatakan sebagai elemen /anggota, kemungkinan yang terjadi

a. x ∈ A (x anggota dari A) dan

b. x ∉ A (x bukan anggota dari A)

Jika terdapat himpunan A dan B serta x suatu elemen/anggota, maka terdapat empat kemungkinan, yaitu

a. x ∈ A dan x ∈ B

b. x ∈ A dan x ∉ B

c. x ∉ A dan x ∈ B

d. x ∉ A dan x ∉ B

Dari x ∈ A dan x ∈ B, menunjukkan bahwa x merupakan anggota dari A juga anggota dari B.

Dari x ∈ A dan x ∉ B, menunjukkan bahwa x elemen dari himpunan A dan bukan elemen B.

Dari x ∉ A dan x ∈ B, menunjukkan bahwa x hanya elemen dari B dan bukan elemen A.

Dari x ∉ A dan x ∉ B, menunjukan bahwa x bukan elemen dari himpunan A dan B

**Relasi Himpunan**

**Aksioma Perluasan (Axiom of Extension) :** Dua himpunan A dan B adalah sama, A = B, ***jika dan hanya jika*** keduanya mempunyai elemen-elemen yang sama (Setiap elemen dari A merupakan elemen dari B dan setiap elemen dari B merupakan elemen dari A)

Aksioma perluasan ini dapat dinyatakan dengan notasi logika melalui dua cara:

a. A = B ⇔ ∀x [x ∈ A ⇔ x ∈ B]

b. A = B ⇔ [∀x [x ∈ A ⇒ x ∈B] ⇔ ∀x [x ∈ B ⇒ x ∈A]]

Aksioma perluasan menyatakan bahwa jika dua himpunan mempunyai anggota yang sama, maka tanpa dipandang bagaimana himpunan-himpunan tersebut ditetapkan. Hal ini berarti jika suatu himpunan ditetapkan secara eksplisit dengan cara mendaftar, urutan dari pendaftaran tidak diperhatikan; himpunan yang dinyatakan dengan {a,b,c} adalah sama dengan himpunan-himpunan yang dinyatakan dcngan {c,b,a} dan {b,a,c}. Oleh selanjutnya, tidak menjadi masalah jika suatu elemen muncul lebih dari satu kali; {a,b,a} {a,b}dan {a,a,a,b,b}adalah sepesifikasi berbeda dari himpunan yang sama. Suatu himpunqn berhingga dapat dicirikan secara implisit maupun eksplisit, misal {1,2,3,4,5} dan {x ⎪ x ∈ **B** ∧ 1 ≤ x ≤ 5}. Selain itu, himpunan yang sama dapat ditentukan secara implisit dengan predikat yang berbeda, misal {x⎪x = 0} dan {x ⎪x ∈ **B** ∧ -1 < x < 1} adalah sama.

**Definsi 3.1.1:** Misal A dan B adalah himpunan, himpunan A dikatakan ***himpunan bagian dari*** *B,* jika setiap elemen dari A merupakan elemen dari B, dan dilambangkan dengan A ⊆ B.

Secara simbolik A ⊆ B ⇔ ∀x[x ∈ A ⇒ x ∈ B]

Jika A ⊆ B, dapat juga ditulis dalam bentuk B ⊇ A dan dikatakan A ***termuat dalam*** B, atau B memuat A, atau B superset dari A.Ditulis A ⊄ B jika A ***bukan himpunan bagian dari*** B. Jika A ⊆ B dan A ≠ B, dikatakan A proper subset (himpunan bagian sejati dari) B.

Contoh:

1. Himpunan bilangan bulat genap adalah proper subset dari himpunan semua

bilangan bulat.

1. Himpunan semua orang laki-laki adalah proper subset dari himpunan semua

manusia.

1. Himpunan {1,2,3,4,5} adalah subset (bukan proper subset) dari himpunan

{x ⎪ 0 < x < 6}

Dalam tulisan ini, diasumsikan semesta pembicaraan U / S yang mungkin atau tidak mungkin ditetapkan secara eksplisit. Setiap peubah yang menyatakan suatu elemen dari suatu himpunan dapat mengambil nilai/ values dari semesta ini. Berikut ini suatu teorema yang menrupakan konsekuensi.

**Teorema 3.1.1**.: Misal S adalah semesta pembicaraan dan A adalah himpunan. Maka A ⊆ S.

Bukti: Bukti ini merupakan suatu contoh dari bukti yang sangat trivial yang berdasar fakta bahwa x ∈ S, untuk setiap elemen x. Himpunan A merupakan bagian dari S ***jika dan hanya jika*** implikasi

x ∈ A ⇒ x ∈ S adalah benar.

Tetapi x ∈ S ***selalu benar***; oleh sebab itu implikasi adalah benar. Karena x adalah sebarang, secara generalisasi

∀x[x ∈A ⇒ x ∈ S

oleh karena itu A ⊆ S. ∎

Teorema berikut ini berkenaan dengan kesamaan dua himpunan.

***Teorema 3.1.2*.** Misal A dan B adalah himpunan-himpunan. Maka A = B ***jika hanya jika*** A ⊆ B dan B ⊆ A.

*Bukti*: teorema ini dibuktikan dalam ***dua bagian*** dengan menggunakan bukti langsung.

a. (bagian “hanya jika” / ⇐): A = B ⇒ [A ⊆ B ∧ B ⊆ A]

Anggap bahwa A = B. Dengan menerapkan aksioma perluasan, setiap anggota dari A adalah anggota dari B. Oleh karena itu, dengan definisi 1.1.1, A ⊆ B. Hal ini menunjukkan bahwa jika A = B maka A ⊆ B. Dengan alasan yang sama, tetapi penukaran peran dari A dan B, jika A = B maka B ⊆ A.

Dengan demikian

[A = B ⇒ A ⊆ B] ∧ [A = B ⇒ B ⊆A]

yang ekivalen dengan

[A = B] ⇒ [A ⊆ B ∧ B ⊆ A]

b. (bagian “jika”/ ⇒): [A ⊆ B ∧ B ⊆ A] ⇒ A = B

Anggap bahwa A ⊆ B dan B ⊆ A. Berdasar Definisi 1.1.1

A ⊆ B. ⇒ ∀x[x ∈ A ⇒ x ∈B] dan B ⊆ A. ⇒ ∀x[x ∈ B ⇒ x ∈A]

Oleh sebab itu,

(A⊆ B ∧ B ⊆ A) ⇒ [∀x[x ∈ A ⇒ x ∈B] ∧ ∀x[x ∈ B ⇒ x ∈A]]

Dengan demikian,

(A ⊆ B ∧ B ⊆ A) ∈ (A = B). ∎

Teorema ini, mengakibatkan

***Corrolary 3.1.1***. Untuk sebarang himpunan A, A ⊆ A. (Bukti sebagai latihan)

***Teorema 3.1.3***. Misal A, B dan C adalah himpunan-himpunan. Jika A ⊆ B dan B ⊆ C maka A ⊆ C.

*Bukti:* Misal x adalah sebarang himpunan pada semesta pembicaraan.

Karena A ⊆ B, maka dipenuhi

x ∈ A ∧ x ∈ B.

Karena B ⊆ C, maka dipenuhi

x ∈ B ∈ ∧ x ∈ C.

Dengan demikian diperoleh.

x ∈ A ⇒ x ∈ C.

Karena x adalah sebarang elemen dari semesta, yang memenuhi bahwa

∀x[x ∈ A ⇒ x ∈ C] dan A ⊆ C. ∎

***Definisi 3.1.2*.** Suatu himpunan yang tidak mempunyai elemen disebut himpunan ***Kosong atau Null.***

Suatu himpunan yang hanya memiliki ***satu elemen*** disebut himpunan ***singleton.***

***Teorema 3.1.4.*** Misal Let φ suatu himpunan kosong dan A sebarang himpunan, maka φ ⊆ A.

*Bukti:* Misal x sebarang elemen dari semesta. Tetapi φ tidak memiliki elemen, implikasi

x ∈ φ ⇒x ∈A selalu benar.

Karena x dipilih sebarang, pernyataan dapat ditetapkan secara universal, yaitu

∀x[ x∈ φ ⇒x ∈A],

yang menunjukkan bahwa φ ⊆ A. ∎

Teorema berikut menunjukkan bahwa terdapat *satu dan hanya satu* himpunan kosong, dinyatakan "himpuan kosong adalah tunggal”

***Teorem 3.1.5:*** Misal φ dan φ’ adalah himpuanan-himpunan kosong, maka φ = φ’.

*Bukti (Langsung):* Karena φ adalah kosong, maka menurut teorema 1.1.4 bahwa

φ ⊆ φ’. Dengan cara yang sama φ’ ⊆ φ. Dengan menerapkan teorema 1.1.2 diperoleh

φ = φ’ ∎

*Contoh-contoh*

a. Himpunan {*a,* b} mempunyai 4 subset yang berbeda, yaitu {*a,* b},[a},{b}dan φ.

b. Himpunan {{a}} adalah singleton set; yang mempunyai tepat dua subset, yaitu

{{a}}dan φ

**3.2 OPERASI-OPERASI PADA HIMPUNAN**

Suatu operasi pada himpunan-himpunan menggunakan himpunan-himpunan (yang disebut oprerand) untuk memperoleh himpunan baru.

Seperti yang dijelaskan sebelumnya, dianggap bahwa semua himpunan berasal dari semesta S/U.

***Definisi 3.2.1*:** Jika A dan B adalah himpunan.

a. Gabungan dari A dan B., dinyatakan dengan A ∪ B, adalah **himpunan**

A ∪ B = {x ⎪ x ∈ A v x ∈ B}.

b. Irisan dari A dan B, dinyatakan dengan A ∩ B, adalah himpunan

A ∩ B = {x ⎪ x ∈ A ∧ x ∈ B}.

c. Selisih dari A dan B atau komplemen relatif B atas A, dinyatakan dengan A-B adalah himpunan

A - B = { x ⎪ x ∈ A ∧ x ∉ B }.

*Contoh-contoh:*

E ⊂ **B** dan E adalah himpunan semua bilangan genap

G ⊂ **B** dan G adalah himpunan semua bilangan ganjil

P ⊂ **B** dan P adalah himpunan semua bilangan prima

**B** adalah himpunan semua bilangan bulat, maka

**B** adalah himpunan semua bilangan bulat, maka

E ∪ G = **B** ; E ∪ **B** = **B** ; G ∪ **B** = **B** ; P ∪ **B** = **B**

E ∩ G = φ, karena tidak ada elemen dari E yang merupakan elemen dari G.

E ∩ P = {2}

G ∩ P = {3, 5, 7, 11, 13, ...}

E ∩ **B** = E, semua bilangan genap adalah bilangan Bulat.

G ∩ **B** = G, semua bilangan ganjil adalah bilangan Bulat.

**B** – E = G

**B** – G = E

E – G = φ

G – E = φ

***Definisi 3.2.2:*** Jika A dan B adalah himpunan-himpunan dan A ∩ B= φ, maka A dan B adalah disjointatau saling asing. Jika C koleksi dari himpunan-himpunan sedemikian hingga dua elemen sebarang berbeda dari C adalah disjoint, maka C adalah koleksi dari himpunan-himpunan yang saling asing.

Contoh

Jika C = {{0}, {1), {2},...} = {(i) ⎪i ∈**N**}, maka C adalah koleksi dari himpunan-himpunan saling asing.

***Teorema 3.2.1:*** Operasi-operasi himpunan , yaitu gabungan dan irisan bersifat komutatif dan asosiatif.

(a) A ∪ B = B ∪ A

(b) A ∩ B = B ∩ A

(c) (A∪B) ∪C=A ∪ (B ∪ C)

(d) (A ∩ B) ∩ C= A ∩ (B ∩ C)

Bukti dari pernyataan (a) – (d) menggunakan sifat komutatif dan asosiatif dari operator-operator logis ∨ dan ∨. Sebagai contoh, dibuktikan pernyataan (a) dan (c) (**sisanya sebagai latihan!**).

**Bukti :**

(a). A ∪ B = B ∪ A **?**

x ∈ A ∪ B ⇔ x ∈ {x ⎪ x ∈ A ∨ x ∈ B}

⇔ (x ∈ A) ∨ ( x ∈ B)

⇔ (x ∈ B) ∨ ( x ∈ A)

⇔ x ∈ {x ⎪ x ∈ B ∨ x ∈ A}

⇔ x ∈ B ∪ A

∴A ∪ B = B ∪ A ∎

(c) (A∪B) ∪ C =A ∪ (B∪C) **?**

(A∪B) ∪ C ⇔ x ∈ {x ⎪ x ∈(A∪B) ∨ x ∈ C}

⇔ {x ∈ A∪B ∨ x ∈ C}

⇔ (x ∈ A ∨ x ∈ B ∨ x ∈ C)

⇔ (x ∈ A ∨ (x ∈ B ∨ x ∈ C))

⇔ (x ∈ A ∨ (x ∈(B ∪ C))

⇔ {x ⎪ x ∈ A ∨ x ∈ (B ∪ C)

⇔ A∪(B∪C)

∴ (A∪B) ∪ C=A ∪ (B∪C) ∎

***Teorema 3.2.2.***  Misal A, B dan C sebarang himpunan, maka

1. A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)

b. A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C)

Dari teorema di atas, hanya dibuktikan bagian a. Sisanya, sebagai latihan bagi mahasiswa.

Untuk membuktikan A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) dilakukan dengan cara

A ∩ (B ∪ C) ⊂ (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) dan (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) ⊂ A ∩ (B ∪ C)

Pertama-tama dibuktikan A ∩ (B ∪ C) ⊂ (A ∩ B) ∪ (A ∩ C)

x ∈ [A ∩ (B ∪ C)], maka x ∈ A dan x ∈ (B ∪ C), berarti

x ∈ A dan x ∈ B atau x ∈ C. Dengan demikian, didapat

i. x ∈ A dan x ∈ B, juga

ii. x ∈ A dan x ∈ C.

Karena dari x ∈ [A ∈ (B ∪ C)] didapat x ∈ A dan x ∈ B atau

x ∈ A dan x ∈ C, maka disimpulkan bahwa

A ∩ (B ∪ C) ⊂ (A ∩ B) ∪ (A ∩ C). i).

Selanjutnya dibuktikan (A ∩ B) ∪ (A ∩ C) ⊂ A ∩ (B ∪ C)

x ∈ [(A ∩ B) ∪ (A ∈ C)], maka x ∈ [(A ∩ B)] atau x ∈ [(A ∩ C)].

x ∈ [(A ∩ B)] berarti x ∈ A dan x ∈ B atau \*

x ∈ [(A ⊂ C)] berarti x ∈ A dan x ∈ C. \*\*

Dari \* dan \*\* dapat disederhanakan menjadi x ∈ A dan x ∈ B atau x ∈ C, secara simbolik

ditulis x ∈ A dan x ∈ (B ∪ C) atau A ∩ (B ∪ C).

Karena dari x ∈ [(A ∩ B) ∪ (A ∩ C)] didapat x ∈ A dan x ∈ (B ∪ C),

berarti(A ∩ B) ∪ (A ∩ C) ⊂ A ∩ (B ∪ C) ii)

Dari i) dan ii) disimpulkan bahwa A ∩ (B ∪ C) = (A ∩ B) ∪ (A ∩ C).

Analog dengan ini dapat dibuktikan A ∪ (B ∩ C) = (A ∪ B) ∩ (A ∪ C).

***Teorema 3.2.3***  Jika A, B dan C adalah himpunan, maka

i. A \ (B ∪ C) = (A \ B) ∩ (A \ C) dan

ii. A \ (B ∩ C) = (A \ B) ∪ (A \ C).

**Bukti:**

a. Seperti langkah-langkah sebelumnya, akan ditunjukkan bahwa

i. A \ (B ∪ C) ⊆ (A \ B) ∩ (A \ C) dan

ii. (A \ B) ∩ (A \ C) ⊆ A \ (B ∪ C).

Pertama-tama ditunjukkan bahwa A \ (B ∪ C) ⊂ (A \ B) ∩ (A \ C).

x ∈ (A \ (B ∪ C)) berarti x ∈ A dan x ∉ ((B ∪ C)) identik dengan

x ∈ A dan x ∉ B atau x ∉ C dan didapat

i. x ∈ A dan x ∉ B atau x ∈ (A \ B), juga

ii. x ∈ A dan x ∉ C atau x ∈ (A \ C).

Karena dari x ∈ (A \ (B ∪ C)) didapat x ∈ (A \ B) dan x ∈ (A \ C),

hal ini menunjukkan bahwa A \ (B ∪ C) ⊂ (A \ B) ∩ (A \ C). \*.

Akhirnya ditunjukkan bahwa (A \ B) ∩ (A \ C) ⊂ A \ (B ∪ C).

x ∈ [(A \ B) ∩ (A \ C)] berarti x ∈ A dan x ∉ B dan x ∈ A dan x ∉ C, disederhanakan

menjadi x ∈ A dan x ∉ B dan x ∉ C identik dengan x ∈ A dan x ∉ (B ∪ C).

Karena dari x ∈ [(A \ B) ï (A \ C)] didapat x ∈ A dan x ∉ (B ∪ C),

menunjukkan bahwa (A \ B) ∩ (A \ C) ⊂ A \ (B ∪ C). \*\*.

Dari \* dan \*\* disimpulkan bahwa A \ (B ∪ C) = (A \ B) ∩ (A \ C).

Analog dengan ini ditunjukkan bahwa A \ (B ∩ C) = (A \ B) ∪ (A \ C).

***Teorema 3.2.4***  Jika A dan B adalah himpunan, maka

a. A ∪ A = A

b. A ∪ φ = A

c. A ∪ U = U

d. A ⊆ (A ∪ B)

e. B ⊆ (A ∪ B)

**Bukti:**

Pada kesempatan ini dibuktikan bagian a. dan d, ***sisanya untuk tugas.***

a. A ∪ A = A **?**

x ∈ A ∪ A ⇔ x ∈{x⎪x ∈ A ∨ x ∈ A}

⇔ x ∈ A ∨ x ∈ A

⇔ x ∈ A

⇔ x ∈{x⎪x ∈ A}

⇔ x ∈ A

∴ A ∪ A = A

d. A ⊆ (A ∪ B) ⇔ x ∈ A ⇒ x ∈ (A ∪ B)

⇔ x ∈ A ⇒ (x ∈ A∨ x ∈ B)

⇔ x ∈ A ⇒ x ∈ A dan x ∈ A ⇒ x ∈ B.

∴ A ⊆ (A ∪ B)

***Teorema 3.2.5***  Jika A dan B adalah himpunan, maka

a. A ∩ A = A

b. A ∩ φ = φ

c. A ∩ U = A

d.(A ∩ B) ⊆ A

e. (A ∩ B) ⊆ B

**Bukti:**

Pada kesempatan ini dibuktikan bagian a. dan e, ***sisanya untuk tugas.***

a. A ∩ A = A **?**

x ∈ A ∩ A ⇔ x ∈{x⎪x ∈ A ∧ x ∈ A}

⇔ x ∈ A ∧ x ∈ A

⇔ x ∈ A

⇔ x ∈{x⎪x ∈ A}

⇔ x ∈ A

∴ A ∩ A = A ∎

e. (A ∩ B) ⊆ B

***Teorema 3.2.6***  Jika A dan B adalah himpunan, maka

1. U’ = φ
2. φ’ = U
3. A ∪ A’ = U
4. A ∩ A’ = φ
5. (A’)’ = A
6. A ⊆ B ⇒ B’⊆ A’
7. (A ∩ B)’ = A’ ∪ B’ Hukum De Morgan
8. (A ∪ B)’ = A’ ∩ B’ Hukum De Morgan

**Bukti:**

Sebagai latihan

***Teorema 3.2.7***  Jika A dan B adalah himpunan, maka

1. A’ = U – A
2. A – B = A ∩ B’
3. A – A = φ
4. A - φ’ = A
5. A – B = B – A ⇔ A = B
6. A – B = A ⇔ (A ∩ B) = φ
7. A – B = φ ⇔ A ⊆ B

**Bukti:**

Sebagai latihan

***Definisi 3.2.3.*** Simetris diferensi dari himpunan A dan B adalah komplemen relative dari A ∩ B dalam A ∪ B dan dilambangkan dengan A Δ B.

Secara simbolik ditulis

A Δ B. = {x ⎪ x ∈ A ∪B ∧ x ∉ A ∩ B.

***Contoh:***

***Teorema 3.2.7***  Jika A, B dan C adalah himpunan, maka

1. A Δ A = φ
2. (A Δ B) Δ C = A Δ (B Δ C)
3. A Δ φ = A
4. A Δ B = B Δ A
5. A Δ B = (A – B) ∪ (B – A) = (A – B) – (A ∩ B)

**Bukti:**

( Bukti sebagai latihan)